Vom Zählen zum Rechnen

Abschlussarbeit des Lehrgangs ALBA intensiv 2021

Carla Lubica Ruprecht, BA MA

Inhalt

Einleitung

Mein Interesse für dieses Themas liegt in meiner eigenen bisherigen Praxiserfahrung in der Basisbildung in einem Brückenkurs zum Pflichtschulabschluss, insbesondere die Lernerfahrung mit einem Teilnehmenden im Kompetenzfeld Mathematik. Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum 20, welche hier als Beispiel fungieren soll, löste er durch Zählen – teils im Kopf, teils durch das Abzählen kleiner Striche abseits der Rechnung, teils durch Abzählen seiner Finger – wobei er sich hierbei oftmals um eins verzählte. Dieser Lösungsweg stimmte meistens, allerdings kostete er ihn viel Zeit. Im Kurs behandelten wir mehrere „Rechentricks" wie z.B. Verliebte Zahlen oder Tauschaufgaben. Diese verstand der Teilnehmende zwar, jedoch schien er sich nicht von seinen Rechenwegen abwenden zu wollen.

Die beschriebene Rechenstrategie des Teilnehmenden wird *zählendes Rechnen* genannt. Dies ist das Thema der vorliegenden Abschlussarbeit.

In meiner Arbeit möchte ich nun an diese Erfahrung anknüpfen. Ich möchte erarbeiten, welche Rolle das Zählen beim Erlernen (effizienter) mathematischer Rechenkompetenzen spielt. Zudem will ich diskutieren, ob es Phasen bis zu dieser Kompetenz gibt, und welche Phasen Teilnehmende vom Zählen über zählendes Rechnen bis hin zu einem automatisierten effizienten Addieren durchlaufen. Dies kann zeigen, welche Strategien der besagte Teilnehmende bereits gebraucht und in welcher Phase er sich ungefähr befindet. Daran anschließend will ich behandeln, welche Unterstützung ich als Lehrperson bereitstellen kann, um ihn zu den nächsten Phasen zu begleiten und zu motivieren.

In meiner These nehme ich an, dass ein Rechnen durch Zählen ein wichtiger Schritt zum Erlernen mathematischer Rechenkompetenzen ist. Ich möchte zudem die Frage aufwerfen, ob es eine Art „Knackpunkt" gibt, die die Teilnehmenden von einem „Zähler" zu einem „Rechner" werden lässt.

Aus der Themen-, Thesen- und Zielbeschreibung ergeben sich für meine Abschlussarbeit nun folgende zwei Fragestellungen:

1) *Wie gestaltet sich – in Hinblick auf die Grundrechenarten Plus und Minus – der Prozess vom Zählen bis hin zum Rechnen bei Lernenden?*
   Welche Rolle spielt dabei das Zählen resp. zählende Rechnen?

2) *Welche Fördermaßnahmen braucht es, um Teilnehmende, die Additions- und Subtraktionsaufgaben durch Zählen bewältigen, zu effizienteren Rechenstrategien zu verhelfen, ohne dabei ihre bisherigen Lösungswege komplett zu negieren?*

Meine Ausarbeitung erfolgt auf Basis von Fachliteratur sowie Internetrecherchen, die möglichst auf dem aktuellen Stand sind.
Als grundlegende Literatur dienten mir die Untersuchungen und theoretischen Ausführungen von Gaidoschik et al. (2017), Häsel-Weide (2016, Wittich) und Wittich (2017) sowie die theoretischen und praxisnahen Berichte von Steinweg (2009) und Wessolowski (2010). Zusätzlich soll diese Arbeit durch weitere herangezogene Literatur einen grundlegenden Überblick über den Diskurs zu zählendem Rechnen geben.

Die Fachliteratur bezieht sich ausschließlich auf mathematische Grundbildung in der Schule. Zu Zählendem Rechnen in der Basisbildung konnte nach längerer Recherche keine Literatur gefunden werden. Trotzdem bin ich überzeugt, dass die Ausführungen dieser Arbeit auch für die Basisbildung relevant und anwendbar sein können, wenn sie nach den Grundsätzen der Basisbildung abgeändert werden.

Die Arbeit gliedert sich in 4 Teile: Das erste Kapitel führt in Zählen als Bestandteil der mathematischen Entwicklung ein (1.). Das folgende betrachtet zählendes Rechnen im Detail. Es erarbeitet die Problematik dieser Rechenstrategie, betrachtet Merkmale, zusammenhängende Schwierigkeiten und Folgen sowie damit zusammenhängende Förderansätze für den Unterricht (2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5.). Das dritte Kapitel behandelt die Ursachen zählenden Rechnens, welches sich bereits über längere Zeit als einzige Strategie verfestigt hat (3.). Im vierten Kapitel werden weitere didaktisch-methodische Schlussfolgerungen für den Unterricht erarbeitet, die Zählkompetenz (4.1.), allgemeine Fördermaßnahmen (4.2.), strukturierte Zahlendarstellung und -zerlegung (4.3.) sowie Additions- und Subtraktionsaufgaben (4.4.) umfassen. Die anschließende Zusammenfassung soll schlussendlich den Zusammenhang mit der mathematischen Basisbildung herstellen.

1. Zählen und die Entwicklung des mathematischen Verständnisses

HÄSEL-WEIDE (2016:12) fasst zusammen, dass vier zentrale Kompetenzen in der frühen Entwicklung des mathematischen Verständnisses eine Rolle spielen:

1. Zählen
2. Bestimmung von Anzahlen
3. das Teile-Ganzes-Prinzip
4. das Erkennen von Strukturen

Diese gilt es in der Schule auszuschärfen (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:12), da sie in weiterer Folge für die Entwicklung effizienterer Strategien als die des zählenden Rechnens relevant werden.

KRAUTHAUSEN, G. & SCHERER (2007:9, zit. nach STEINWEG 2009:124) sehen nur zwei grundlegende Zahlaspekte, welche für das Verständnis von Rechenoperationen die größte Rolle spielen: Den ordinalen Zählaspekt sowie den kardinalen Anzahlaspekt (vgl. auch STEINWEG 2007) – vergleichbar mit 1 und 2 bei HÄSEL-WEIDE (2016).

Die begrifflichen Unterschiede sowie deren wechselseitige Beeinflussung beschreibt HÄSEL-WEIDE (2016:12) wie folgt:

> Bei den Analysen wurde deutlich, dass die unterschiedlichen Kompetenzen nicht trennscharf voneinander zu betrachten sind. Zum einen stehen sie in einem wechselseitigen Entwicklungsprozess und zum anderen werden ähnliche Aufgaben je nach Blickrichtung unterschiedlichen theoretischen Konzeptionen zugeordnet. Überlappungen gibt es sowohl zwischen dem eher numerisch gedachten Teile-Ganzes-Konzept und dem Erkennen von Strukturen als auch zwischen Addition und Subtraktion und dem Teile-Ganzes-Konzept. (HÄSEL-WEIDE 2016:12)

Es kann davon ausgegangen werden, dass Strukturierungsfähigkeit – siehe Punkt 4 oben – sich erheblich auf mathematische Kompetenzen auswirken können (LÜKEN 2012, zit. nach HÄSEL-WEIDE 2016:10). Umgekehrt betrachtet zeigen Ergebnisse von Muster- und Strukturaufgaben an, wenn Lernende insgesamt eine geringere mathematische Leistung vorweisen. Strukturerkennungsfähigkeiten bringen Kinder bereits zu Schulbeginn in unterschiedlichen Maßen mit (vgl. LÜKEN 2012:178, zit. nach HÄSEL-WEIDE 2016:10). Deren Entwicklung hängt mit der Ausformung numerischer Kompetenzen (Zählen, Mengenerfassen, Teile-Ganzes-Prinzip) eng zusammen (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:2).

2. Zählendes Rechnen: Merkmale und Schwierigkeiten[1]

Das sogenannte *zählende Rechnen* – oben in Punkt 1 und 2 sichtbar – beschreibt ein Abzählen des Rechenweges bis hin zum Ergebnis (vgl. WITTICH 2017:2,9). Es ist „[…] einerseits ein entwicklungsgemäßer Zugang zur Mathematik, andererseits weist verfestigtes zählendes Rechnen auf grundlegende Schwierigkeiten beim Mathematiklernen hin“ (HÄSEL-WEIDE 2016:1). Zählen trägt auf der einen Seite also eine bedeutende Rolle in der frühen mathematischen Entwicklung, die allerdings mit

[1] Die Unterkapitel dieses Abschnitt sind an den meiner Meinung nach besonders schlüssigen Aufbau bei WITTICH (2017) angelehnt.

Schulbeginn nicht abgeschlossen ist. Deshalb sollten Zähl- und Mengenerfassungsfertigkeiten gezielt weiterentwickelt werden (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:8).

Empirisch und inhaltlich hängen auf der anderen Seite die Verwendung der Strategie mit (mathematischen) Lernschwierigkeiten eng zusammen (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:6, 22) – wenn neben den Zähl-Rechenstrategien keine weiteren hinzukommen, wenn sie nicht von effizienteren abgelöst werden oder wenn dieser Übergang nur verlangsamt stattfindet (vgl. hierzu GERSTER 1996, GAIDOSCHIK 2010, MOSER OPITZ 2013; siehe ausführliche Studienübersicht bei WITTICH 2017:2).
Die Ablösung von einem zählenden Rechnen ist in der derzeitigen deutschsprachigen Mathematikdidaktik allerdings ein grundlegendes Lernziel. Für Schulen gilt dies bereits für das erste Schuljahr zu erzielen, was viele Kinder jedoch nicht erreichen (vgl. GAIDOSCHIK et al. 2017:94). Wie HÄSEL-WEIDE in ihrer Studie feststellen konnte, ist die Ablösung im regulären Unterricht möglich, und zwar, indem „[…] durch unterrichtsintegrierte, kooperativ angelegte Förderbausteine ein Erkennen und Nutzen von Strukturen initiiert werden kann, was wiederum eine Ablösung vom zählenden Rechnen begünstigt“ (HÄSEL-WEIDE 2016:212). Gleiches berichtet auch WITTICH (2017:164ff.) aus der durchgeführten Interventionsstudie, die zeigte, dass weniger die fördernden Maßnahmen[2] signifikante Unterschiede im Gebrauch von zählendem Rechnen brachten, sondern vielmehr „[…] die kooperativ-strukturierte Methode, [die] bei den Kindern zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit dem mathematischen Lerninhalt geführt hat“ (WITTICH 2017:128).

WITTICH (2017) nennt Lernende, die sich von zählenden Strategien nicht gelöst haben „verfestigt zählende Rechner“[3]. An diesem Punkt soll hinzugefügt werden, dass nie von einem trennscharfen Übergang zwischen Strategien gesprochen werden kann, wie dies auch schon SIEGLER & JENKINS 1989 feststellen konnten. Vielmehr überlappen sich parallele Strategien; auch werden je nach Aufgabentyp unterschiedliche angewendet – so wendeten Schüler_innen abwechselnd Zähl- und Ableitungsstrategien an. Alternative Strategien müssen erst entdeckt werden, um bei Gebrauch verstanden zu werden (vgl. WITTICH 2017:44, vgl. Studienübersicht bei HÄSEL-WEIDE 2016:17ff.).

Kommt es zum Übergang zu alternativen Strategien, werden Strategien gemixt und sechs verschiedene Typen von Entwicklungsverläufen unterschieden (vgl. GAIDOSCHIK 2010:425, zit. nach HÄSEL-WEIDE 2016:20).
Verfestigte Zählstrategien und die damit zusammenhängenden Lernhürden wirken sich auf weitere mathematische Bereiche aus (siehe Studienübersicht bei WITTICH 2017:2). WITTICH (2017:30f.) fasst mehrere Merkmale zählenden Rechnens zusammen, die aufzeigen, warum sie im weiteren Lernprozess zu Schwierigkeiten führen (siehe bspw. bei GAIDOSCHIK 2009b, GERSTER 1996):

- Zählende Rechner_innen zählen in Einserschritten und fassen Zahlenmengen nicht weiter zusammen. Zudem bündeln sie nicht in Zehner, weswegen sie Schwierigkeiten mit dem dekadischen Zahlensystem bzw. Stellenwertsystem haben.
- Zählende Rechner_innen verstehen Zahlen nicht als Mengen, sondern vielmehr als Punkt auf einem Strahl, als Position innerhalb einer auswendig gelernten Zahlenreihe, die sie aufzählen.

[2] Dies sind die gleichen wie bei HÄSEL-WEIDE (2016) Sie wurden in Zusammenarbeit u.a. von HÄSEL-WEIDE und WITTICH veröffentlicht: HÄSEL-WEIDE et al. (2014).
[3] Dieser Begriff wird ab hier weitergeführt.

- Zählende Rechner_innen sehen jede Rechenaufgabe als eigenständige Aufgabe an, welche sie mit anderen nicht verknüpfen.
- Zählenden Rechner_innen fehlt oftmals eine Vorstellung von Rechenoperationen.
- Zählende Rechner_innen rechnen oft fehlerhaft, da das zählende Rechnen fehleranfälliger ist, insbesondere im Zahlenraum ab 20, sowie bei Multiplikation und Division.[4]
- Zählende Rechner_innen müssen sich Teilrechnungen bei schriftlichen Rechnungen im Gedächtnis behalten [bzw. notieren; Anm. d. Verf.in].

WESSOLOWSKI (2010:20) betont zudem, dass zählende Rechner_innen, vor allem aufgrund mangelnder Automatisierung von Aufgaben im Zahlenraum 10, stets aufs Neue zu zählen beginnen müssen.

Laut WITTICH (2017:31) fehlt es oftmals an Bewusstsein für die Relevanz effizienterer Strategien:

> Das zählende Rechnen führt im kleinen Zahlenraum meist noch zum richtigen Ergebnis und somit von den Kindern als erfolgreiche Strategie angesehen. Sie können nicht abschätzen, dass dieses Vorgehen im größeren Zahlenraum schwierig und ineffizient wird.

Dabei sind gerade diese verinnerlichten Aufgaben - WESSOLOWSKI (2010:20) zählt ganze 66 davon – essentiell für ein sicheres und rasches Vorwärtskommen bei mathematischen Problemen. Als Beispiel: Allein die Rechnung *6 + 7* erfordert ein hohes Maß an Verständnis für Beziehungen zwischen Zahlen gleichzeitig, wie hier veranschaulicht:

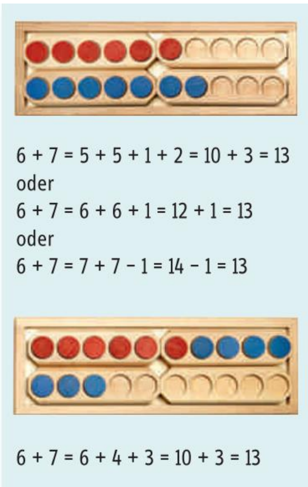


Abbildung 1: Rechenschiffchen (WESSOLOWSKI 2010:20)

Verschiedene Zahlenzerlegungen kommen hier zum Tragen. Zudem verhelfen derartige automatisierte Aufgaben dem Herstellen von Zusammenhängen, und zwar zahlen- und aufgabenübergreifend: „Die Zerlegungsaufgabe 7 = 2 + 5 zu wissen, kann helfen die Aufgaben 8 + 7 oder 28 + 7 oder 68 + 27 schrittweise zu lösen. Für 6 + 7 oder 35 + 7 werden dagegen andere Zerlegungen von sieben gebraucht“ (WESSOLOWSKI 2010:20).

Dies zeigt auf, wie komplex die Grundlage für effiziente Rechenstrategien und wie relevant deren Thematisierung im Unterricht ist.

[4] Oftmals kommt es zu Fehlern plus/minus 1, da der Summand mitgezählt wird, vgl. HÄSEL-WEIDE (2016:22).

2.1. Fingerzählen

Zählende Rechner_innen helfen sich oftmals mit ihren eigenen Fingern oder anderen Materialien, die sie abzählen können. Dabei ist zwischen *dynamischem* und *statischem* Fingerzählen zu unterscheiden (vgl. WITTICH 2017:31f.): Beim dynamischen werden zuerst der erste Summand gezählt, d.h. nach und nach wird ein Finger ausgestreckt, daraufhin wird der zweite Summand ebenso hinzugezählt. Alternativ kann der erste Summand nicht angezeigt werden, sondern als Startpunkt zum Weiterzählen des zweiten Summanden dienen. Beim Subtrahieren werden die Finger eingeklappt. Das statische Fingerzählen vergleicht WITTICH mit einem Fingerbild: Beide Summanden werden nacheinander auf einmal aufgeklappt – nicht ein Finger nach dem anderen, wie beim dynamischen Zählen – und schlussendlich wird das Ergebnis als Gesamtheit abgelesen.

GAIDOSCHIK et al. (2017:95) und HÄSEL-WEIDE (2016:13ff.) unterscheiden zählende Strategien wiederum in *Alleszählen* und *Weiterzählen.* Finger müssen nicht zwingend dabei gebraucht werden, allerdings ist dies am häufigsten zu beobachten. Beim Alleszählen werden beide Summanden separat abgezählt, dann zusammengehalten und alles wird schlussendlich nochmals abgezählt. Beim Weiterzählen wird vom zweiten Summanden begonnen und weitergezählt. Beide Wege werden auch für die Subtraktion angewandt.

Zu den qualitativen Unterschieden zwischen Alles- oder Weiterzählen divergieren die Meinungen. HESS (2012:114, zit. nach HÄSEL-WEIDE 2016:14) sieht Weiterzählen als Weiterentwicklung zum Alleszählen, da die Zahlenkette aufgebrochen wird. GAIDOSCHIK (2010:109, zit. nach HÄSEL-WEIDE 2016:14) wiederum bezweifelt dies, da Zahlen weiterhin als Zusammensetzung von Einzelelementen betrachtet werden und es zu keinem tieferen Verständnis des Teile-Ganzes-Konzepts kommt.

WITTICH (2017:32) berichtet auseinandergehende Meinungen, wie mit Fingerzählen im Unterricht umgegangen werden soll. Einerseits vermittelt diese Technik den Lernenden ein Gefühl von Sicherheit (vgl. SCHIPPER 2005). Die Lernenden können auf dieses Hilfsmittel jederzeit zurückgreifen. Auf der anderen Seite verstärkt das Fingerzählen das Vorgehen in Einerschritten. Zudem bleibt es auf den Zahlenraum der 10 Finger beschränkt. Zählende Rechenstrategien werden demnach noch mehr verfestigt. SCHIPPER (2005, zit. nach GAIDOSCHIK et al. 2017:98) plädiert für ein Anknüpfen an bestehende Zählstrategien und schlägt zudem bei alleszählenden Kindern vor, erst das Weiterzählen abzusichern. Gleichsam postuliert WEMBER (2003:62, zit. nach WITTICH 2017:31), dass das zählende Rechnen im Unterricht generell nicht diffamiert werden sollte – im Gegenteil: es sollte als Rechenstrategie anerkannt und zu einsichtigerem Rechnen weiter entwickelt werden.

STEINWEG (2009:124) vertritt die Meinung, Finger und Fingerbilder von Zahlen und Rechenvorgängen keinesfalls zu verbieten, sondern sich insbesondere Fingerbilder für den Unterricht zunutze zu machen. GAIDOSCHIK et al. (2017:120) sehen dies ebenso: Eine Tabuisierung von Fingerzählen kann sich kontraproduktiv auswirken.

2.2. Schwierigkeiten des ordinalen Verständnisses & Förderansätze

Hierbei geht es vorrangig um das Zählen. Um Mengen korrekt abzählen zu können, brauchen Lernende ein Verständnis von folgenden Prinzipien, die es im Unterricht zu erarbeiten gilt (vgl. STEINWEG 2009:124):

- Prinzip der stabilen Ordnung:
  Die Reihung der Zahlwörter ist festgelegt, z.B. nach 1 kommt 2, nach 3 kommt 4, … . Es wird nach Größe geordnet.
- Prinzip der eindeutigen Zuordnung:
  Jedes Mengenelement kommt einem Zahlwort gleich, z.B. 1 Stück von etwas ist die Zahl 1.
- Prinzip der Anzahlbestimmung:
  Beim Abzählen entspricht das letzte Zahlwort der vorliegenden Menge, z.B. 1 – 2 – 3, es sind 3 Stück von etwas hier.
- Prinzip der Abstraktion von qualitativen Eigenschaften:
  Beliebige zählbare Elemente unterliegen obigen Prinzipien.
- Prinzip der Abstraktion von räumlichen Anordnungen:
  Obige Prinzipien gelten trotz unterschiedlicher Positionen im Raum.

Der ordinale Zahlenaspekt entwickelt sich zunehmend mit der Fähigkeit, flexibler[5] und sicherer zählen zu können. Damit ist gemeint, dass Lernende vor- und rückwärts zählen können, die Position einer Zahl sowie deren Vorgänger und Nachfolger bestimmen können. Mit größerer Zählsicherheit und Orientierung in der Zahlenreihe wird nun nicht mehr in Einer- sondern größeren Schritten gezählt (anfänglich hier Zweier, Fünfer und Zehner). Der Zahlenraum erweitert sich stetig und die Basis für ein Verständnis des Stellenwertsystems wird gelegt (KAUFMANN & WESSOLOWSKI 2014, SCHMASSMANN et al. 2007, STEINWEG 2009, zit. nach WITTICH 2017:33). Hilfreich für das Verständnis von Grundrechenarten kann hier der Zahlenstrahl sein, welchen STEINWEG (2009:125) mit Verweis auf eine Studie von MOSER OPITZ & SCHMASSMANN 2003 allerdings nicht als geeignete Rechenhilfe ansieht, da er das Zählen verfestigt, sondern nur der Nachverfolgung von einer linearen Zahlenanordnung dienen sollte. STEINWEG (2009:124) empfiehlt zudem, sich innerhalb der Grenzen der Lernenden zu bewegen: Sind ihre Zahlreihengrenzen im Alltag bei 24, so sollte auch nur bis dahin gezählt werden.

Zählende Rechner_innen sind unsicher beim Zählen, ihnen fehlt die beschriebene sichere Zählkompetenz. Sie zählen oftmals fehlerhaft und tendieren dazu, ihr Ergebnis öfters zu überprüfen. In der Fachliteratur wurde nachgewiesen, dass „[…] Probleme im verbalen Zählen einen zentralen Prädiktor für mathematische Schwierigkeiten darstellen können bzw. rechenschwache Kinder häufig über eine geringere Zählkompetenz verfügen“ (WITTICH 2017:33).[6]

Sicheres Zählen wird als grundlegende Voraussetzung für die Herausbildung weiterer arithmetischer Kompetenzen angesehen. Erst, wenn Lernende sicher zählen, können Zahlbeziehungen entdeckt und angewendet werden (SCHMASSMANN et al. 2007, zit. nach WITTICH 2017:33).

[5] Wie ab einer bestimmten Startzahl, vgl. auch STEINWEG (2009:124).

[6] Bezüglich „rechenschwach“ ist hier anzumerken: Nicht jedes zählend rechnende Kind ist automatisch rechenschwach. Ein Kind, das Ende der erste Schulstufe vorwiegend zählend rechnet, ist nicht deshalb schon »rechenschwach«, aber es läuft Gefahr, unter dem Druck kommender schulischer Anforderungen »rechenschwach« zu werden“, GAIDOSCHIK (2009a:170), zit. nach HÄSEL-WEIDE (2016:24).

2.3. Schwierigkeiten des kardinalen Verständnisses & Förderansätze

Dieser kommt zum Tragen, sobald Zahlen nicht mehr linear angeordnet sind. Zahlen werden hier *Mengenbilder* oder *Anzahlen* genannt (vgl. STEINWEG 2009:125).

Das kardinale Zahlenverständnis besagt, dass Lernende erkennen, dass mit Abzählen einzelner Elemente die Gesamtmenge festgestellt werden kann. Durch Abzählen werden also Mengen bestimmt. Im Anfangsstadium geschieht dies beispielsweise in Einserschritten bei Kindern am Beginn der Schulzeit, die die zuletzt gezählte Zahl der Zahlenreihe mit der ihnen vorliegenden Menge gleichsetzen (siehe GAIDOSCHIK 2010, MOSER OPITZ 2013).

Anzahlen können nicht nur durch Abzählen erfasst werden. HÄSEL-WEIDE (2016:2) beschreibt zusätzlich Methoden wie *Subitizing* (kleine Mengen schnell und sicher Erfassen) oder Schätzen. Zudem können Anzahlen umso leichter erfasst werden, wenn sie strukturiert oder in einer vertrauten Anordnung dargestellt werden. Man spricht dann von einem *simultanen* Erfassen (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:7).

WITTICH (2017:34) betont, dass an dieser Stelle gezielt gefördert werden müsse, um Lernende vom Abzählen in Einserschritten hin zu einem *simultanen* Erfassen zu bringen. Hierbei ist es wichtig, mit strukturierten Mengenbildern zu arbeiten[7], wie z.B. mit mathematischen Strukturen der Fünfer-, Zehnerstruktur, der *Kraft der Fünf* (KRAUTHAUSEN, G. 1995) sowie Zahlbildern aus dem Alltag der Lernenden, die es beide zu entdecken gilt (nach STEINWEG 2009, WITTMANN 2011). Ziel ist ein simultanes Erfassen im Zahlenraum 20, die aufgebauten mentalen Vorstellungen von Anzahlen können nun abgerufen und müssen nicht mehr einzeln abgezählt werden (vgl. WITTICH 2017:50). STEINWEG (2009:126) spricht zusätzlich von einem *quasi-simultanen* Erfassen sowie der Möglichkeit, anhand von geometrischen Darstellungsmustern weitere neue arithmetische Eigenschaften ablesen zu können. Als hilfreiche Struktur sieht sie Doppelreihen sowie die Struktur der Finger, welche ein Dezimalsystem widerspiegeln, als hilfreiche Mittel an.

Im Anschluss daran werden mit Hilfe von Zählstrategien (ordinales Verständnis) die Mengen verglichen: weniger, mehr, gleich viel etc. Dies stellt die Grundlage für ein Verständnis des Zahlensystems dar (vgl. WITTICH 2017:34f.).

2.4. Schwierigkeiten im Verständnis des *Teile-Ganzes-Prinzips* & Förderansätze

Das Teile-Ganzes-Prinzip kann als Weiterführung zum ordinalen und kardinalen Zahlverständnis betrachtet werden:

> Dieses Prinzip beschreibt, dass Zahlen in kleinere Zahlen zerlegt und zusammengesetzt werden können, wie z.B. dass sieben Elemente in drei und vier Elemente aufteilbar sind. Hinzu kommt, dass es Beziehungen zwischen den einzelnen Zahlen gibt, die sich wiederum mit Zahlen darstellen lassen (Mengendifferenz). (WITTICH 2017:35)

Zum Beispiel kann die Zahl 9 in die Teilmengen 4 und 5 zerlegt werden. Gleichzeitig kann gesagt werden, dass 9 um 4 mehr als 5 ist (Mengendifferenz). Das Verständnis derartiger Beziehungen der Mengen und ihrer Teile bereitet ein arithmetisches Zahlenverständnis vor und es entwickelt sich eine flexible Rechenfertigkeit (vgl. WITTICH 2017:35f.). Zudem bildet es die Basis für mehrere

[7] Mehr dazu siehe Kapitel 4.3.

Rechenoperationen. Zentrale mathematische Gesetzmäßigkeiten wie Kommutativität[8] und Assoziativität[9] werden hier schon erkannt, Additions- und Subtraktionsaufgaben werden bereits auf symbolischer Ebene gelöst (vgl. Häsel-Weide 2016:8f.). Kinder müssen demnach durch Aufgaben Einsicht bekommen, dass die Menge sich durch Teilung nicht verändert, und dass sie sich bei Hinzufügen eines Elementes im Summanden um genau dieses Element vergrößert:

> Zudem kann diese numerische Beziehung des Teile-Ganzes-Konzeptes genutzt werden, um Aufgaben aus Kernaufgaben abzuleiten. Das heißt, die Aufgabe 3+4 kann auf die Kernaufgabe 3+3 zurückgeführt und die Beziehung 3+4 = 3+(3+1) = (3+3) +1 bei der Lösung der Aufgabe genutzt werden. Verfügen die Kinder über diese Kompetenzen wird davon gesprochen, dass ein flexibles Teile- Ganzes-Konzept ausgebildet ist. (Häsel-Weide 2016:9)

Wird allerdings stets zählend gerechnet und werden Mengen nicht erfasst, wird das Verständnis des Teile-Ganzes-Prinzips verhindert (vgl. Gaidoschik 2010:176, zit. nach Wittich 2017:36).
Dies wirkt sich zudem auf die Erkenntnis in das Stellenwertsystem aus, welches eine besondere Form des Teile-Ganzes-Prinzips darstellt, „[…] da eine Zerlegung einer Zahl in ihre Stellenwerte (z.B. 134 = 100 + 30 + 4) nur auf der Grundlage eines Teile-Ganzes-Verständnis möglich ist“ (Wittich 2017:36). Fördernde Maßnahmen fordern Kinder auf, Mengen auf unterschiedliche Weise zu zerlegen, z.B. anhand von Punktbildern (vgl. Häsel-Weide 2016:85).

2.5. Schwierigkeiten beim Abruf und Automatisieren & Förderansätze

Kommt es zu einer zunehmenden Automatisierung von Rechenaufgaben, werden die Lösungen sukzessive im Gedächtnis abgespeichert. Diese können fortan ohne Zählen und Rechnen abgerufen werden. Das Automatisieren von Rechnungen wie a+1 und a+a, sogenannte *Verdopplungsaufgaben,* scheint Kindern meist leicht zu fallen (vgl. Häsel-Weide 2016:15).

Zählende Rechner_innen haben Schwierigkeiten dabei, Rechenaufgaben zu automatisieren, weswegen ihnen weniger mathematische Informationen zum Abruf bereitstehen, mit Hilfe derer sie sich neue Aufgaben ableiten könnten[10]. Der Zählprozess nimmt durch mangelnde Automatisierung derart viel Gedächtnisleistung in Anspruch (so muss gleichzeitig gezählt aber auch verbalisiert werden), dass zwischen Aufgabe und Ergebnis keine Zusammenhänge hergestellt werden können (vgl. Wittich 2017:37).
Automatisierung soll hier allerdings nicht als Auswendiglernen einzelner Aufgaben verstanden werden, wie dies Lernende praktizieren, denen alternative Strategien fehlen. Vielmehr geht es hierbei darum, zu „[…] lernen, Aufgaben abzuleiten und in Beziehung zu setzen und diese Ableitungsstrategien zu automatisieren“ (Wittich 2017:44).

Ziel ist es hier also nicht, Aufgaben als zusammenhanglose Fakten auswendigzulernen, sondern im Zusammenhang zu verinnerlichen.

---

[8] Z.B. Summanden können vertauscht werden: 3 + 5 oder 5 + 3. Für die Summe macht es keinen Unterschied.
[9] Z.B. Die Summe bleibt gleich, wenn von einem Summanden abgezogen, dem anderen etwas hinzugefügt wird: (3 + 1) + (5 – 1) = (3 – 1) + (5 + 1). Für die Summe macht es wiederum keinen Unterschied,
[10] Häsel-Weide (2016:16) sieht das Ableiten als nächsten Entwicklungsschritt nach der Rechenstrategie Abruf, d.h. mathematische Fakten abzurufen. Die ihr vorangehende Strategie ist das Alles- und das Weiterzählen.

3. Ursachen verfestigt zählenden Rechnens

Als schwerwiegende Ursache sieht HÄSEL-WEIDE (2016:22) die Gewohnheit des Zählens, welches sich über einen zu langen Zeitraum hält:

> Weiterzählendes Rechnen tendiert dazu sich zu verfestigen, da die Gewohnheit des schnellen Weiterzählens nicht zu einer Speicherung der Ergebnisse im Langzeitgedächtnis führt. Dies wiederum kann zu einer geringen Anzahl von automatisierten Aufgaben führen, die wiederum die Möglichkeiten zum Ableiten erschweren. Offen ist bei dieser These, wie denn diejenigen Kinder, die bereits von zählenden Strategien zum Ableiten gekommen sind, diesen Schritt geschafft haben. Entscheidend könnte hier die Gewohnheit des Zählens sein, die ein Nachdenken über Aufgaben und alternative Strategien gar nicht mehr aufkommen lässt. Die Gefahr des Weiterzählens liegt damit wahrscheinlich in der Dauer, mit der es als Hauptstrategie benutzt wird.

Hier klingt bereits der Zusammenhang zwischen Rechnen, Zählen und Gedächtnis an.

In der Fachliteratur wurde nachgewiesen, „[…] dass Schülerinnen und Schüler mit schwachen Mathematikleistungen aufgrund von Beeinträchtigungen des Arbeitsgedächtnisses Probleme mit dem Abruf von Zahlenfakten bzw. arithmetischem Faktenwissen haben" (WITTICH 2017:38). Aus diesem Grund wird oftmals auf zählende Rechenstrategien ausgewichen.

Mit BADDELEYS (1986) Modell des Arbeitsgedächtnisses im Hintergrund[11] wird davon ausgegangen, dass Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten insbesondere in einer der 3 Komponenten desselben Probleme hatten, nämlich im sogenannten *visuellen Skizzenblock*. Dieser verarbeitet visuelle und räumliche Inhalte (siehe Studie von SCHUCHARDT et al. 2008, vgl. WITTICH 2017:39f.). WITTICH (2017:40) schlussfolgert daraus für weitere Fördermaßnahmen:

> Insofern zeigen die Ergebnisse aus dieser Studie, dass die Verarbeitung von visuellen Informationen, wie z.B. bei der Zahldarstellung in strukturierten Mengen, einen zentralen Aspekt bei der Entwicklung arithmetischer Kompetenzen und somit für die Ablösung vom zählenden Rechnen darstellen.

Gleiches berichtet auch MOSER OPITZ (2008) in einer Studie: Kinder, die wiederholt mit strukturierten Mengenbildern und Zahlbeziehungen gearbeitet hatten, zählten weniger häufig ab als die Vergleichsgruppe.[12]
Insgesamt wird festgehalten, dass bis dato nicht klar ist, inwieweit Teile des Arbeitsgedächtnisses einzelne Rechenprozesse beeinflussen. Allerdings kann davon ausgegangen werden, „[…] dass der Erwerb mathematischer Fertigkeiten davon abhängen kann, in welchem Umfang das Arbeitsgedächtnis funktioniert" (WITTICH 2017:42). Eine höhere Arbeitsgedächtniskapazität ist demnach für Schüler_innen von großem Vorteil: Zählprozesse laufen automatisiert ab und arithmetisches Faktenwissen wird leicht gespeichert und abgerufen (vgl. WITTICH 2017:42f.).

Eine weitere Ursache für verfestigt zählendes Rechnen sind die Vorkenntnisse, die v.a. Kinder zu Schulbeginn mitbringen – wie in den vorherigen Kapiteln erarbeitet wurde. Hierbei sind numerische Basisfertigkeiten, quasi-simultane Anzahlerfassung, Fähigkeit, Strukturen zu erkennen, Zahlenkenntnis sowie faktenbasierte Strategien gemeint (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:29f.).

---

[11] Besonders relevant hier die Verknüpfung des Arbeitsgedächtnisses mit Informationen des Langzeitgedächtnisses sowie die Aufrechterhaltung kurzlebiger Informationen durch sog. *rehearsal,* ständiges Wiederholen in einer Schleife, wie beim zählenden Rechnen vgl. WITTICH (2017:39).
[12] Weitere Studien, die Studien erste Ansätze für die Ablösung vom zählenden Rechnen liefern, finden sich bei WITTICH (2017:45ff.).

Ein weiterer Aspekt, der zählende Rechenstrategien eher befördern als ablösen kann, sind unterrichtliche Faktoren. Diese beinhalten Unterrichtsmaterialien und Methoden wie „[…] intensives Auswendiglernen des Einspluseins, Gewichtung von Weiterzählen vom größeren Summanden aus, kaum Verwendung von Ableitungsstrategien […]“ (WITTICH 2017:43). Kinder ohne alternative Strategien neben Auswendiglernen von mathematischen Fakten fokussieren sich auf das Ergebnis, ohne dabei operative Zusammenhänge innerhalb und zwischen den Aufgaben zu verstehen (vgl. WITTICH 2017:43). Der Unterricht kann dies verstärken, wenn der Fokus mehr auf dem Ergebnis als auf dem Rechen*weg* und damit zusammenhängenden Rechen*strategien* liegt.

Zudem werden „[…] Arbeits- oder Veranschaulichungsmaterialien verwendet, an denen die Kinder während des Lösens von Aufgaben abzählen können, wie z.B. unstrukturierte Arbeitsmittel ohne Fünfer- und Zehnerstruktur oder lineare Darstellungen an der Zahlenreihe. Hinzu kommt, dass die Finger permanentes Anschauungsmaterial sind […]“ (WITTICH 2017:43). Vielmehr sollten Material und Methoden zum Einsatz kommen, die die Lernenden herausfordern und einen Einsatz alternativer Strategien verlangen (vgl. GAIDOSCHIK 2003, zit. nach WITTICH 2017:44). Zudem schlägt HÄSEL-WEIDE (2016:35) die Arbeit mit herausfordernden Aufgaben vor, welche die Lernenden kaum oder schwer mit ihren verfestigten Strategien lösen können. Dies soll die Relevanz effizienterer Strategien bewusst machen.

4. Weitere Schlussfolgerungen für den Unterricht

4.1. Grundlage Zählkompetenz

Bevor weiterführende Fördermaßnahmen begonnen werden, braucht es als wichtigste Grundlage eine solide Zählkompetenz, so WITTICH (2017:48), auch wenn dies auf den ersten Blick im klaren Gegensatz zu einer Ablösung des *zählenden* Rechnens steht:

> Dabei geht es vielmehr darum, an die Zählkompetenzen der Kinder anzuknüpfen und diese zu erweitern, damit die Kinder das Anzahlkonzept verstehen. Zu einer sicheren Zählkompetenz gehören: Zählwörter kennen und fehlerfrei vor- und rückwärts zählen. Um über das Zählen in Einerschritten hinauszukommen, muss das Zählen in Schritten (Zweier-, Fünfer- und Zehnerschritte) gefördert werden. (WITTICH 2017:48)

Hier kommt der Kontext von Deutsch als Zweitsprache hinzu. Versprachlichungen der Zählwörter und von Zählvorgängen muss besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

4.2. Allgemeine Fördermaßnahmen

Zählendes Rechnen kann nicht abgelöst werden, indem Lernende aufgefordert werden, einfach nicht mehr zu zählen. Die Lernenden müssen vielmehr „[…] alternative Strategien zum Zählen (in Einerschritten) aufbauen, welche auf einem fundierten Verständnis von Zahlen und Operationen fußen sowie die Beziehungen zwischen diesen in den Blick nehmen“ (HÄSEL-WEIDE 2016:1).

Letztere betreffend gilt es, es die Vorstellung der Operationen als Veränderung
bzw. Vergleich von Mengen zu erarbeiten (vgl. HÄSEL-WEIDE 2016:23, 33-35). HÄSEL-WEIDE (2016:34) rät an diesem Punkt von Handlungen mit einzelnen Mengen ab, sondern empfiehlt zusammenhängende

Mengen zu gebrauchen, wie z.B. durch Abdecken einzelner Anzahlen. Sonst wird wiederum zählend gerechnet. Ein anschauliches Beispiel hierfür findet sich bei Wessolowski (2010:23):

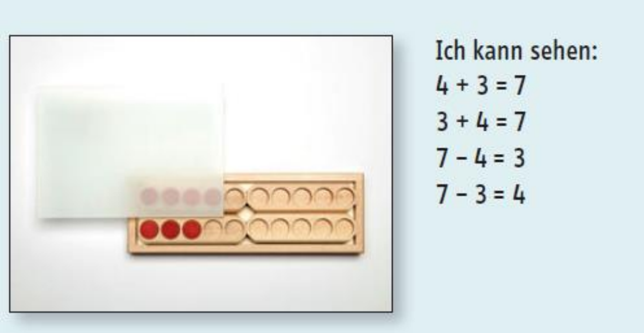


Abbildung 2: Abdecken von zusammenhängenden Mengen (Wessolowski 2010:23)

Gaidoschik (2009b:5, zit. nach Wittich 2017:52) betont ebenfalls, dass es von Relevanz ist, zuerst Grundvorstellungen von Rechenoperationen zu vermitteln, da Lernende mit mathematischen Lernschwierigkeiten dies oftmals nicht mitbringen. Plusrechnen verstehen sie als Vorwärts-, Minusrechnen als Rückwärtszählen. Angesetzt werden kann hier mit dem Verändern, d.h. Hinzufügen und Wegnehmen sowie dem Vergleichen von Mengen, wobei letztere beide die Hauptfunktionen der Subtraktion darstellen. Für die Erarbeitung bieten sich konkrete Objekte an, wie z.B. Plättchen, die schrittweise abstrahiert und schlussendlich durch mentale Vorstellungen ersetzt werden.

In einer weiteren Publikation veröffentlichten Häsel-Weide et al. (2014) die in Häsel-Weide (2016) zur Untersuchung genutzten Förderbausteine. Diese Bausteine beinhalten Fördermaßnahmen zur Ablösung von zählendem Rechnen und fokussieren folgende 3 Bereiche: Zahlvorstellungen, Operationsvorstellungen und Rechnen mit Beziehungen. Diese werden in kooperativen Settings entdeckend bearbeitet (siehe Häsel-Weide 2016:71ff). Sie dienen dazu, „strukturfokussierende Deutungen anzuregen" (Häsel-Weide 2016:213). Hier ein Beispiel zum Aufbau von Baustein I, welchem ausführliche Arbeitsblätter beigefügt sind:

I	a	Immer 7	Zerlegen von kleinen Mengen Fokus auf Mehrdeutigkeit der Zerlegung bzw. Mehrdeutigkeit der Darstellung bei gleicher Gesamtanzahl
	b	Schnelles Sehen von Plättchen-Anzahlen	Schnelles Erfassen kleiner Anzahlen in linearen Anordnungen und Würfelbildern Fokus auf Zusammensetzungen von Gesamtanzahlen aus „schnell zu bestimmenden Zerlegungen"

Abbildung 3: Förderbaustein I (Häsel-Weide 2016:88)

Gaidoschik et al. (2017), die Lehrkräfte zu ihrer Umsetzung von Maßnahmen zur Ablösung zählenden Rechnens im Unterricht befragten sowie stichprobenartig Kinder interviewten, zogen aus ihrer sowie vorhergegangenen Studien mehrere Schlüsse für den Unterricht mathematischer Grundbildung.

Eine wesentliche Rolle für die Entwicklung effizienter Rechenstrategien spielen Ableitungsstrategien, die im Unterricht gezielt behandelt werden sollten[13] (siehe Studienübersicht bei Gaidoschik et al. 2017:96f.). Ein wiederholtes Thematisieren der Ableitungsstrategien fördert die Automatisierung (vgl. Erhebungen von Rechtsteiner 2013, Steinberg 1985:347, Thornton 1990:260, zit. nach Gaidoschik et al. 2017:97).

Dabei kommt es stark auf deren *konsequente* Wiederholung sowie Verbalisierung an.[14] Besonders gilt dies für Subtraktionsaufgaben, die mehr Raum im Unterricht erfordern. Eine Erarbeitung von Subtraktionsaufgaben bietet sich bereits beim Teile-Ganzes-Prinzip an. Zudem ist eine stärkere Verknüpfung mit Additionsaufgaben zu empfehlen. Hilfreich für die Erarbeitung von Ableitungsstrategien können hier die Finger sein, die allerdings nur statisch verwendet werden sollten (vgl. Gaidoschik et al. 2017:120).

Beispiele für Ableitungsstrategien geben Gaidoschik et al. (2017:110) in ihrer Studie[15]:

Ableitung aus Umkehraufgabe,
z. B. 9 – 6 = 3, weil 6 + 3 = 9

„Kraft der Fünf" im Zahlenraum 10,
z. B. 8 – 5 = 3, weil 8 = 5 + 3

„Kraft der Fünf" für Zehnerübergang,
z. B. 8 + 8 = 16, weil 5 + 5 = 10, 3 + 3 = 6

„Neunervorteil",
z. B. 3 + 9 = 12, weil 3 + 10 = 13

„Teilschrittverfahren",
z. B. 6 + 7 = 13, weil 6 + 4 = 10, 7 = 4 + 3, 10 + 3 = 13

Abbildung 4: Ableitungsstrategien (Gaidoschik et al. 2017:110)

Ebenfalls können sogenannte Nachbaraufgaben bewusst genutzt werden, z.B. kann 3 + 5 gelöst werden, indem vom abgespeicherten Ergebnis 3 + 3 abgeleitet wird, oder von 4 + 4 (beide Summanden werden gegengleich um das gleiche Element verändert). Gleiches gilt für Subtraktionsaufgaben, z.B. die Lösung von 8 – 5 über das abgespeicherte Ergebnis von 8 – 4, demnach 8 – (4 + 1).

4.3. Strukturierte Zahlendarstellung und Zahlenzerlegung

Um den Teilnehmenden dazu zu verhelfen, sich vom zählenden Rechnen zu lösen, braucht es laut Wessolowski (2010:20) vorrangig eine Automatisierung der Zahlenzerlegung vor allem im Zahlenraum 10, d.h. durch Auswendiglernen von z.B. 7 als 6 + 1 oder 5 + 2 etc.

[13] Auch wenn von anderen Autor_innen kritisiert wird, wie bewusst Ableitungsstrategien von Kindern eingesetzt werden. Mehr dazu vgl. Häsel-Weide (2016:15f.) Einer bewussten Nutzung steht die Theorie einer intuitiven Nutzung von Ableitungsstrategien gegenüber – so die *Zahlenblickschulung* bei Rechtsteiner (2013:97), zit. nach Häsel-Weide (2016:16).
[14] Dieser Punkt wird für Deutsch-als-Zweitsprache-Lernende umso relevanter.
[15] Mehr dazu vgl. Gaidoschik (2010:134ff.), zit. nach Gaidoschik et al. (2017:110).

Hilfreich für die Erarbeitung erachtet WESSOLOWSKI (2010:21) eine strukturierte Darstellung von Zahlen. STEINWEG (2009:125f.) verdeutlicht, wie viel einfacher es fällt, Mengen zu erfassen, sobald sie strukturiert angeordnet sind und nicht einzeln abgezählt werden müssen:

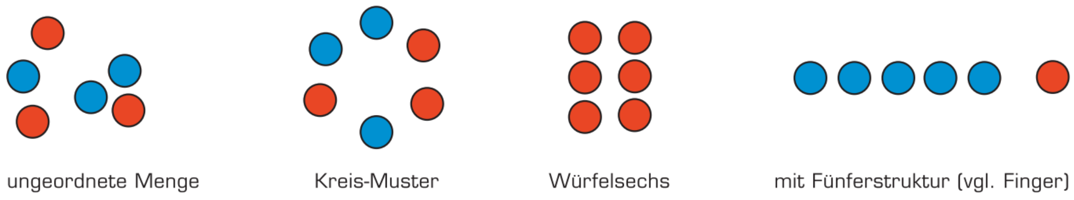


Abbildung 5: Die Relevanz strukturierter Zahlendarstellungen (STEINWEG 2009:125)

Derartige Anordnungen, welche viele bereits implizit beherrschen, sollen regelmäßig im Unterricht angesprochen werden, und zwar mit möglichst unterschiedlichen Alltagsbeispielen, z.B. Knöpfe (vgl. STEINWEG 2009:126).

WESSOLOWSKI (2010:21) erarbeitet Strukturen vermehrt mit Rechenschiffchen (siehe Abbildung 1). Keinesfalls dürfen, so die Autorin, Zahlen nur ungeordnet wie durch Murmeln abgebildet werden.

Ebenfalls helfen strukturierte Zahlendarstellungen mit Hilfe der *Kraft der Fünf,* Fingerbilder und Fingerrechnen, welche ein statisches Zählen verlangen, z.B. 3 Finger und 5 Finger ergeben zusammen 8 Finger. Wichtig ist hier, dass die gleiche Anzahl durch verschiedene Darstellungen abgebildet wird. So erhalten Lernende Einsicht darin, dass die Anordnung sich zwar ändern kann, die Summe jedoch gleich bleibt – im Sinne des Teile-Ganzes-Prinzips (vgl. WITTICH 2017:48f., vgl. auch STEINWEG 2009:126). Fixe Bilder, die mit 5er- und 10er-Strukturen arbeiten, sind hierfür allerdings vorteilhafter, so STEINWEG (2009:126), die sich stark für eine Nutzung der Finger bei Zahlenzerlegungen ausspricht – dies beugt dem (oftmals falschen) zählenden Fingerrechnen erheblich vor.

Damit zusammenhängend spielen zwei mathematische Gesetze eine Rolle: Das Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz) und das Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz). Das Vertauschungsgesetz beschreibt die Konstanz der Summe, ob nun 3 + 5 oder 5 + 3, beide ergeben 8. Das Verbindungsgesetz besagt eine schrittweise Berechnung der Summe (z.B. 5 + 8 = 5 + 5 + 3 = 10 + 3), eine Erhöhung der Summe bei Erhöhung der Summanden (z.B. (5 + 2) + 8 = 15, um 2 mehr als beim vorigen Beispiel) sowie eine gleichbleibende Summe bei gegensinnig veränderten Summanden (z.B. (5 – 3) + (3 + 3) = 8) (vgl. WITTICH 2017:51f.).

Der größte Fehler im Mathematik-Anfangsunterricht, so KRAUTHAUSEN, G. & SCHERER (2007:247, zit. nach STEINWEG 2009:124) ist das vorzeitige Beenden von der Arbeit mit anschaulichen Darstellungen, welches bewirkt, dass mentale Bilder von Zahlen und Mengen von den Lernenden noch nicht fertig konstruiert und genutzt werden konnten.

Für anschauliche Zahlendarstellungen eignen sich Rechenschiffchen (Siehe Abbildung 1). Die Zahlen können entweder linear (z.B. links 5 + rechts 2) oder untereinander (oben 4 + unten 3) angeordnet werden. Zudem wird auf dem Rechenschiffchen ersichtlich, wie viele Plätze noch bis zur 10 zu füllen sind. Das anfängliche Legen der Zahlen in den Rechenschiffchen, welches ein Mengenverständnis vermittelt und die Lernenden zum Entdecken[16] motivieren kann, wird nun durch Karten der Zahlen ersetzt, welche dasselbe abbilden wie die Rechenschiffchen. Diese werden den Lernenden nur kurz gezeigt. Daraufhin sollen sie versprachlichen, was sie auf die Schnelle auf dem Bild sehen konnten:

> ‚Ein Schiffchen war ganz voll und noch zwei., oder: ‚Links fünf, daneben zwei.' oder ‚Oben vier, unten drei.' oder ‚Doppel-drei und noch eins.' Dabei kommt es nicht darauf an, eine bestimmte Sprechweise zu verwenden oder schnell zu einer formalen Darstellung durch Gleichungen zu gelangen, sondern darauf, dass die Kinder das Zahlbild mental rekonstruieren und beschreiben können. Gelingt dies nicht, kann zur Unterstützung des ‚Sehens' der Struktur auch ein Stift zwischen die Plättchen in den Rechenschiffchen oder auf die Zahlbilder gelegt werden. (Wessolowski 2010:21)

Zusätzlich kann hier auch abgefragt werden, wie viel noch auf den Zehner fehlen würde. Diese Förderung bereitet auf weitere Rechenoperationen vor (vgl. Wessolowski 2010:21f.).

Die vorhin erarbeiteten Zahlenzerlegungen werden nun systematisch dargestellt. Wessolowski (2010:22) schlägt hier (aufklappbare) Zahlenhäuser vor, die den Zahlenbildern beigefügt werden:

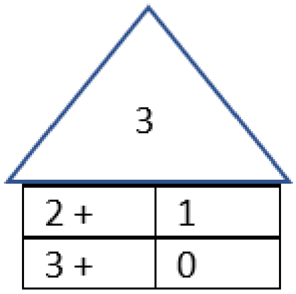


Abbildung 6: Schema eines Zahlenhauses

Der letzte Punkt ist hier die Zerlegung der Zahl 10, welche bereits vorher erfragt wurde (s.o.: Wie viele fehlen noch auf den Zehner?). Hierbei kann die Vorstellung *verliebter Zahlen* hilfreich sein, z.B. 6 liebt immer die Zahl 4, 7 immer die 3 etc. Zudem können und sollen hier auch die Finger eingesetzt werden.

Zum Üben schlägt Wessolowski (2010:22) Spiele zum Ertasten und Ergänzen bestimmter Mengen vor, das eine bildliche Vorstellung der strukturierten Zahlendarstellung erfordert.

Weitere Anregungen und spielerische Übungen für die Schulung des kardinalen Zahlenaspekts, hier mit Hilfe der Finger, liefert Steinweg (2009:127f.):

- Fingerblitz
  Eine Zahl wird genannt, welche von den Lernenden möglichst schnell mit den Fingern abgebildet werden soll (hier aber in einprägsamen Bildern, möglichst mit der *Kraft der Fünf*). Zusätzlich kann erfragt werden, wie viele (gekrümmte) Finger noch bis zur vollen Zehnerzahl fehlen, um die Ergänzung bis 10 vorzuentlasten.

- Fühlst du's?
  Die Lernenden sitzen auf ihren ausgestreckten Fingern. Eine Zahl wird genannt, woraufhin sie

[16] Moser Opitz (2008) kam in ihrer Studie zum Schluss, dass eine aktiv-entdeckende Lernumgebung positiven Einfluss auf die Ablösung zählender Rechenstrategien hatte. Ebenso förderlich ist eine gemeinsame Aufgabenbearbeitung im Sinne kooperativen Lernens, so die Ergebnisse von Häsel-Weide (2016), vgl. Wittich (2017:2).

beschreiben sollen, wie ihre Hände aussehen würden, wenn sie die Zahl darstellen würden, z.B. die Zahl 6: 5 Finger sind ausgestreckt, auf der anderen Hand ein weiterer gestreckt, 4 sind gekrümmt.[17]

- Wie viele Hände?
  Eine Zahl wird genannt, woraufhin überlegt wird, wie viele Hände benötigt werden, die Zahl mit den Fingern abzubilden. Zusammen wird die Zahl daraufhin dargestellt.

- Fingermemory
  Wie bei einem regulären Memory werden die passenden Karten mit Fingerbildern und Punkten bzw. Zahlen gesammelt.[18]

- Schnapp die Karten
  Mit den gleichen Memory-Karten wird nun gespielt. In der Mitte liegen die Fingerbilder-Karten verdeckt auf einem Stapel, während jede_r vor sich die Zahlenkarten liegen hat. Die Fingerbilder werden umgedeckt und jede_r versucht möglichst schnell, die passende Zahlenkarte darauf zu legen.

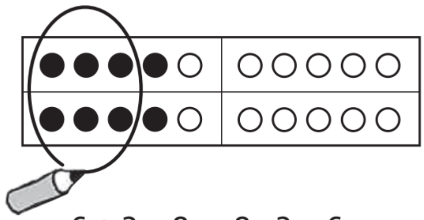
- Verwandte Fingerbilder
  Die Lernenden werden hier angehalten, miteinander verwandte Fingerbilder zu überlegen, d.h. Zahlen, die zueinander in einer Beziehung stehen:
  1. Zahlen, die zusammen 5 ergeben: 2 ist mit 3 verwandt, da 2 + 3 = 5;
  2. Zahlen, die mit 5 zusammen eine weitere ergeben: 8 ist mit 3 verwandt, da 3 + 5 = 8
  3. die Zahlen der gekrümmten Finger, die noch auf 10 fehlen: 8 ist mit 2 verwandt, da 8 + _ = 10; auf 10 fehlt noch 2.

Die letzte der Aufgaben bereitet Additionen und Subtraktionen vor. Ebenso gehört hier die Vorgangsweise dazu, Lernende zwei Fingerbilder vergleichen zu lassen und auf diese Art den Unterschied, folglich die Differenz zu ermitteln (z.B. Unterschied zwischen einem 7er- und einem 5er-Fingerbild sind 2 Finger).

4.4. Additions- und Subtraktionsaufgaben

Wenn alle Zahlenzerlegungen beherrscht werden, geht der nächste Schritt über zu Additions- und Subtraktionsaufgaben, deren Tauschaufgaben (wie 10 – 6 = 4 und getauscht somit 10 – 4 = 6), die den Zahlenbildern ohnehin schon inhärent sind (vgl. WESSOLOWSKI 2010:23). Die Lernenden sollen dem bekannten Zahlenbild passende Plus- und Minusaufgaben entnehmen, wie z.B. hier:

[17] Auch hier wird die Ergänzung bis 10 vorbereitet [Anm.d. Verf.in].
[18] Material hierfür unter https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~herrmann/schule/material.pdf [10.08.2021].



6 + 2 = 8   8 – 2 = 6
2 + 6 = 8   8 – 6 = 2

Abbildung 7: Additions- und Subtraktionsaufgaben entnehmen (Wessolowski 2010:27)

Ist auch dieser Schritt automatisiert, können Spiele wie Schüttelboxen eingesetzt werden (vgl. Wessolowski 2010:23).

Ohne das beschriebene Grundwissen der Zahlenbeziehungen im Zahlenraum 10, sowie zusätzlich der Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum 20 – mit Verdoppelungsaufgaben sind hier z.B. *6 + 6,* mit Halbierungsaufgaben z.B. *20 – 10* gemeint – ist eine Ablösung vom zählenden Rechnen nicht möglich (vgl. Schipper 2005:32; zit. nach Wessolowski 2010:23).

Steinweg (2009:128) schlägt hierfür eine Übung mit den Fingern vor – Spieglein, Spieglein – , um Verdoppelungsaufgaben zu trainieren: Ein_e Lernende_r stellt eine Zahl als Fingerbild dar, welche die_der Lernpartner_in nachstellen muss. Zusammen bilden sie eine Verdopplungsaufgabe, die anschließend gelöst wird (z.B. 6 + 6 = 12). Hierbei soll erst mit der *Kraft der Fünf* gerechnet werden, demnach 5 + 5 = 10, um die restlichen Finger anschließend hinzuzuzählen. Zu einem späteren Zeitpunkt kann diese Übung für das Einmaleins der 2er-Reihe benutzt werden. Wird diese Übung beherrscht, kann sie abgeändert werden, indem nur *fast* Verdoppelungen dargestellt werden, wie z.B. 6 + 5 statt 6 + 6. Wieder wird hier mit der *Kraft der Fünf* gezeigt und anschließend gerechnet, d.h. 6 (5 Finger/1 Hand und 1 Finger) plus 5 (5 Finger/1 Hand) sind zusammen 2 Hände und 1 Finger, also 11.

Zusammenfassung

Zu Beginn der vorliegenden Arbeit wurden zwei Fragestellungen formuliert, mit Hilfe derer das Thema Zählendes Rechnen betrachtet wurde. Diese lauteten:

1) *Wie gestaltet sich – in Hinblick auf die Grundrechenarten Plus und Minus – der Prozess vom Zählen bis hin zum Rechnen bei Lernenden?*
   Welche Rolle spielt dabei das Zählen resp. zählende Rechnen?

2) *Welche Fördermaßnahmen braucht es, um Teilnehmende, die Additions- und Subtraktionsaufgaben durch Zählen bewältigen, zu effizienteren Rechenstrategien zu verhelfen, ohne dabei ihre bisherigen Lösungswege komplett zu negieren?*

Die beiden Fragen konnten zu einem großen Teil beantwortet werden. In den ersten 3 Kapiteln wurde auf Frage 1 Bezug genommen. Erste Förderansätze wurden erarbeitet. Im 4. Kapitel wurden weitere Schlussfolgerungen für den Umgang mit zählendem Rechnen im Unterricht gesammelt.

Zählen sowie zählendes Rechnen spielt in der frühen mathematischen Entwicklung gemeinsam mit der Erfassung von Mengen (sowie deren Teilung und Zusammensetzung – Teile-Ganzes-Prinzip) und dem Erkennen von Strukturen eine bedeutende Rolle. Diese Kompetenzen bringen Kinder bereits zu Schulbeginn in unterschiedlichem Ausmaß mit und brauchen Weiterentwicklung sowie Ausschärfung.

Zählende Rechner_innen weisen oftmals Fingerzählen auf (dynamisch oder statisch; Alles- oder Weiterzählen), sowie grundlegende Schwierigkeiten im ordinalen Verständnis (d.h. Zählen), im kardinalen Verständnis (d.h. Mengen bestimmen), im Verständnis des Teile-Ganzes-Prinzips (Mengen teilen und wieder zusammensetzen) sowie beim Abrufen und Automatisieren (mathematische Fakten speichern, abrufen, und neue Aufgaben ableiten). Diese Merkmale können als Signale dienen, zählende Rechner_innen zu erkennen.

Gleichzeitig können sie auf die in der Einleitung gestellten Frage nach einem *Knackpunkt*, der die Teilnehmenden von einem „Zähler“ zu einem „Rechner“ werden lässt, ansatzweise antworten. Es gibt in meinen Augen nicht nur einen, sondern mehrere Knackpunkte vom Zählen(den) Rechnen zum Rechnen (mit Hilfe alternativer Strategien), deren Entwicklung individuell, parallel und überlappend verlaufen kann.

Es wurde gezeigt, dass die beschriebenen Schwierigkeiten/Merkmale ihre Ursachen in einer verfestigten Zähl-Gewohnheit, in der Kapazität des Arbeitsgedächtnisses (insbesondere im visuellen Skizzenblock, der Visuell-räumliches verarbeitet) sowie in unterrichtlichen Faktoren wie z.B. dem Fokus auf dem Ergebnis zu finden sind.
Die beschriebenen Ursachen für zählendes Rechnen können auf Lernende in der Basisbildung zutreffen, wenn auch nicht zwingend. Hinzu kommen andere Faktoren wie bspw. die individuelle (mathematische) Lernbiografie.

Zählende Rechner_innen lösen sich oftmals spät oder gar nicht von zählenden Rechenstrategien ab (verfestigt zählende Rechner_innen), da ihnen die Strategie Sicherheit vermittelt, sie sich als effizient für einen gewissen Zahlenraum erweist und genannte Schwierigkeiten den Einsatz alternativer Strategien verzögern oder gar. Zählende Rechenstrategien gehen oftmals mit (mathematischen) Lernschwierigkeiten oder/und Rechenschwäche einher.

Im Hintergrund der Basisbildung ist dies jedoch mit Vorsicht zu betrachten: Rechenschwäche ist nicht mit Basisbildungsbedarf gleichzusetzen. Allerdings kann sich Rechenschwäche zusätzlich bemerkbar machen.

Es wurde diskutiert, wie mit zählendem Rechnen und Fingerzählen im Unterricht umgegangen werden kann. Eine Anknüpfung an die bestehenden Rechenstrategien der Lernenden (z.B. vom Alleszählen zum Weiterzählen, gezielter statischer Einsatz der Finger) kann hier positive Effekte haben, nicht zuletzt findet hier entgegen der oftmaligen Diffamierung des zählenden Rechnens eine Wertschätzung individueller Herangehensweisen statt.

Für den Unterricht braucht es neben wertschätzendem und lernendenorientiertem Vorgehen vor allem passende Fördermaßnahmen und -materialien. Allem voran ist es wichtig, eine sichere und flexible Zählkompetenz zu entwickeln. Im Anschluss gilt es das Teile-Ganzes-Prinzip durch möglichst anschauliche strukturierende Darstellungen zu festigen.

Erst dann kann schrittweise zu Addition und Subtraktion übergegangen werden, die stets in Zusammenhang mit den vorhergegangenen Zahlenzerlegungen und -zusammensetzungen betrachtet werden sollen.

Alternative ableitende Strategien werden so erarbeitet. In einem kooperativ-entdeckenden Setting, das mehrfach lösbare Aufgaben bietet und bisherige Strategien (über-)fordert, wird Bewusstsein für die Relevanz neuer Strategien geschaffen. Relevant ist es hier, Ableitungsstrategien zu thematisieren, Rechenwege zu verbalisieren und diesen Prozess oftmals zu wiederholen.

Bezogen auf jugendliche und erwachsene Lernende in der Basisbildung, die keine oder wenig Schulbildung erfahren konnten, kann demnach davon ausgegangen werden, dass sie grundlegende Zähl-, Mengen(teil)- und Strukturkompetenzen mitbringen, welche in der Schule oder in anderen Lernkontexten womöglich nicht weiterentwickelt werden konnten.

An dieser Stelle ist allerdings fraglich, ob die beschriebene mathematische Entwicklung für (junge) Erwachsene, die wenig oder keine Schulbildung erfahren konnten und zusätzlich Deutsch nicht als Erstsprache erworben haben – im Unterschied zu den untersuchten Kindern zitierter Studien – in ähnlichen Phasen abläuft. Dies kann vorerst nur angenommen werden, bleibt aber für weitere Forschungen offen zu bestätigen oder zu verwerfen.

Trotzdem konnten für den Basisbildungskontext wichtige Erkenntnisse für den Mathematikunterricht gezogen werden. Das zählende Rechnen bei Lernenden der Basisbildung könnte für zukünftige Forschungen ein relevantes Thema darstellen.

Literaturverzeichnis

BADDELEY, A. D. (1986): Working memory. Oxford psychology series. Oxford: Clarendon Press.

GAIDOSCHIK, M. (2003): Didaktogene Faktoren bei der Verfestigung des zählenden Rechnens. In: FRITZ, A., G. RICKEN & S. SCHMIDT (Hrsg.). Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Beltz-Handbuch. Weinheim: Beltz, 166–180.

GAIDOSCHIK, M. (2009a): Didaktogene Faktoren bei der Verfestigung des „zählenden Rechnens". In: FRITZ, A., G. RICKEN & S. SCHMIDT (Hrsg.). Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. s.l.: Beltz Verlagsgruppe, 166–180.

GAIDOSCHIK, M. (2009b): Nicht-zählende Rechenstrategien – von Anfang an! Durch mathematisches Denken zum kleinen Einspluseins. – Grundschulunterricht Mathematik 1, 4–6.

GAIDOSCHIK, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt am Main, Wien u.a.: Lang.

GAIDOSCHIK, M., A. FELLMANN, S. GUGGENBICHLER & A. THOMAS (2017): Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. – Journal für Mathematik-Didaktik 38, 1, 93–124.

GERSTER, H.-D. (1996): Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen – Methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: EBERLE, G. & R. KORNMANN (Hrsg.). Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Möglichkeiten der Vermeidung und Überwindung. Weinheim, 137–161.

HÄSEL-WEIDE, U. (2016): Vom Zählen zum Rechnen. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

HÄSEL-WEIDE, U., M. NÜHRENBÖRGER, E. MOSER OPITZ & C. WITTICH (2014²): Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen. Seelze: Klett Kallmeyer.

HESS, K. (2012¹): Kinder brauchen Strategien: Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen ; [Download-Material. Seelze: Kallmeyer.

KAUFMANN, S. & S. WESSOLOWSKI (2014⁴): Rechenstörungen: Diagnose und Förderbausteine ; [mit CD-ROM. Seelze-Velber: Klett/Kallmeyer.

KRAUTHAUSEN, G. (1995): Die »Kraft der Fünf« und das denkende Rechnen. In: MÜLLER, G. N. & E. C. WITTMANN (Hrsg.). Mit Kindern rechnen. Beiträge zur Reform der Grundschule Band 96. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule - Der Grundschulverband - e.V, 87–108.

KRAUTHAUSEN, G. & P. SCHERER (2007³): Einführung in die Mathematikdidaktik. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Heidelberg, München: Elsevier, Spektrum, Akad. Verl.

LÜKEN, M. M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik Bd. 9. Münster, New York, NY, München, Berlin.

MOELLER, K; H.-C. NUERK (2012): Zählen und Rechnen mit den Fingern. – Lernen und Lernstörungen 1, 1, 33–53.

MOSER OPITZ, E. (2008³): Zählen, Zahlbegriff, Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Beiträge zur Heil- und Sonderpädagogik. Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Moser Opitz, E. (2013[2]): Rechenschwäche, Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Beiträge zur Heil- und Sonderpädagogik Bd. 31. Bern: Haupt-Verlag.

Moser Opitz, E. & M. Schmassmann (2003[1]): Heilpädagogischer kommentar zum Zahlenbuch. Zug: Klett und Balmer.

Peter, J. & H. Claus (2006[1]): Finger, Bilder, Rechnen – Anleitung: Förderung des Zahlverständnisses im Zahlraum bis 10. Anleitung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Rechtsteiner, C. (2013): Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik Bd. 19. Münster, New York, NY, München, Berlin.

Schipper, W. (2005): Lernschwierigkeiten erkennen - verständnisvolles Lernen fördern: Beschreibung des Mathematikmoduls G4. Kiel: IPN Leibniz-Institut f. d. Pädagogik d. Naturwissenschaften an d. Universität Kiel.

Schipper, W., S. Wartha & N. v. Schroeders (2011): BIRTE 2: Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr ; Handbuch zur Diagnostik und Förderung. Braunschweig: Schroedel.

Schmassmann, M., E. Moser Opitz, E. C. Wittmann & G. N. Müller (2007[1]): Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 1: Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten. Zug: Klett und Balmer.

Schuchardt, K., C. Mähler & H. Hasselhorn (2008): Working Memory Deficits in Children With Specific Learning Disorders. – Journal of Learning Disabilities 41, 6, 514–523.

Siegler, R. S. & E. Jenkins (1989): How children discover new strategies. John M. MacEachran memorial lecture series 1989. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steinberg, R. M. (1985): Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. – Journal for Research in Mathematics Education, 16, 5, 337-335.

Steinweg, A. S. (2007[1]): Mathematisches Lernen. In: Frank, A. (Hrsg.). Das KIDZ-Handbuch: Grundlagen, Konzepte und Praxisbeispiele aus dem Modellversuch "KIDZ - Kindergarten der Zukunft in Bayern". Köln: Kluwer, 136–203.

Steinweg, A. S. (2009): Rechnest du noch mit den Fingern? - Aber sicher! – Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht. Primar 1, 4, 124–128.

Thornton, C. A. (1990): Solution strategies: subtraction number facts. – Educational Studies in Mathematics. 21, 3, 241–263.

Walter, D. (2018): Ablösung vom zählenden Rechnen. In: Walter, D. (Hrsg.). Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 87–127.

Wember, F. B. (2003): Die Entwicklung des Zahlbegriffs aus psychologischer Sicht. In: Fritz, A., G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.). Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Beltz-Handbuch. Weinheim: Beltz, 48–64.

Wessolowski, S. (2010): Vom Zählen zum Rechnen. – Mathematik differenziert 4, 20–27, <https://c.wgr.de/f/onlineanhaenge/files/html5_preview/onl89003/>.

Wittich, C. (2017): Mathematische Förderung durch kooperativ-strukturiertes Lernen. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

WITTMANN, E. C. (2011): Über das „rechnende Zählen“ zum „denkenden Rechnen“. – Die Grundschulzeitschrift, 248/249, 52–55.

Abbildungsverzeichnis